Erinnerung:

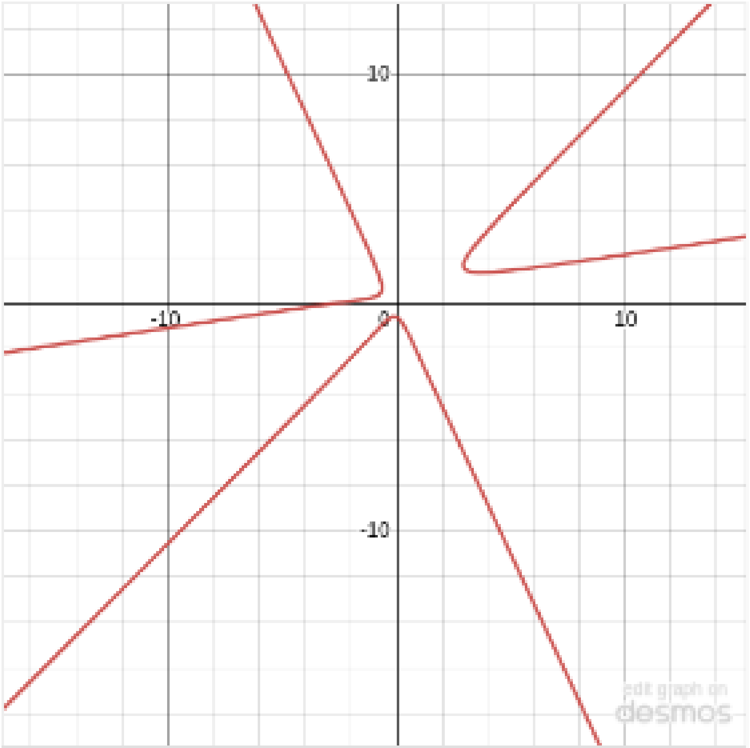
Mordell's Theorem

Wenn eine nicht singuläre rationale kubische Kurve in der Ebene einen rationalen Punkt hat, so ist die Gruppe der rationalen Punkte endlich erzeugt.

möchten wir beweisen!

Um beweisen zu können, müssen wir unsere Ausgangssituation vereinfachen!

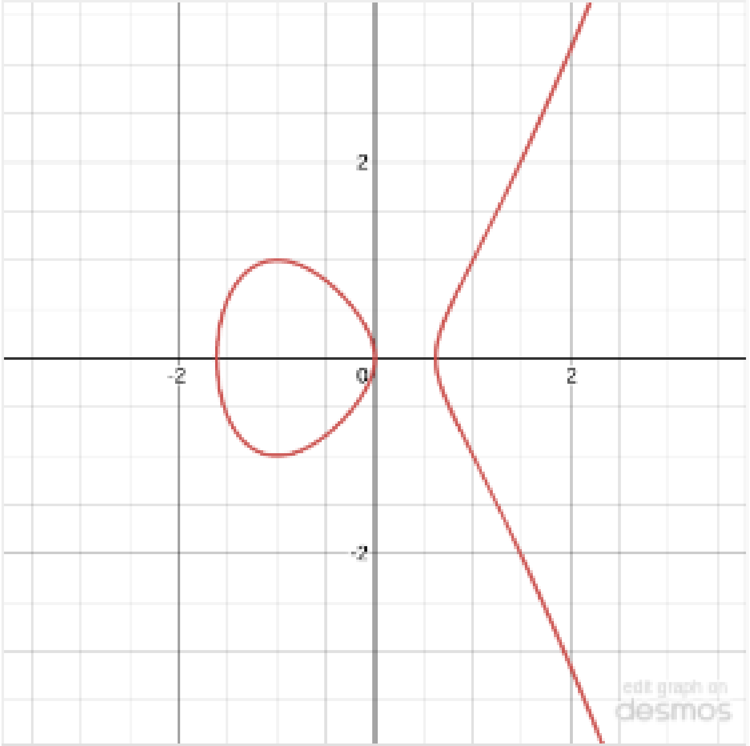
Kubische Kurve:



$$C : ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 + ex^2 + fxy + gy^2 + hx + iy + j = 0$$

< kubische_Kurve >

allgemeine Weierstraß-Normalform:



$$C : P = 0 \to C' : y^2 = x^3 + a'x^2 + b'x + c'$$

< allgemeine_WNF >

1.3

Weierstraß-Normalform

Weierstraß-Normalform

klassisch

$$y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$$

allgemein

$$y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$$

Wir möchten demnächst nur noch elliptische Kurven der Form

$$y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$$

betrachten müssen

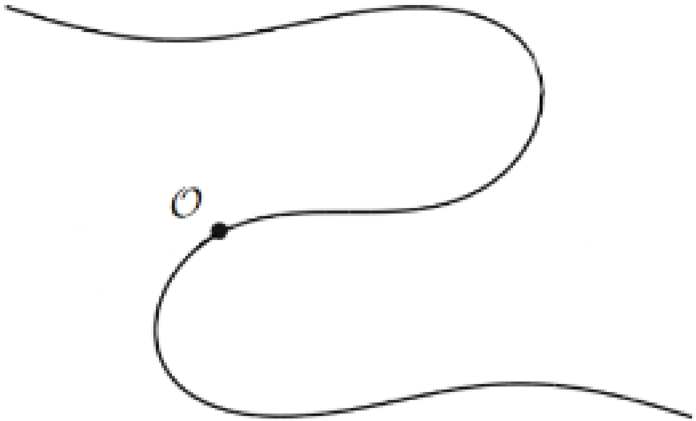
$$C \text{ kubische Kurve} \xrightarrow[\text{Äquivalent}]{\text{birational}} \text{WNF}$$

"birational äquivalent" bedeutet, es gibt eine projektive Transformation zwischen den kubischen Kurven

Betrachte dazu folgende Konstruktion:

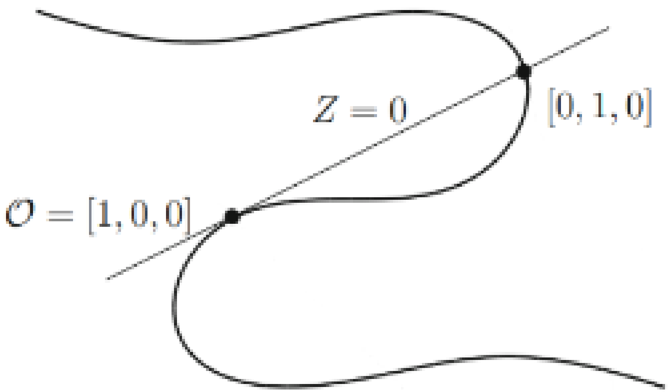
Schritt 1

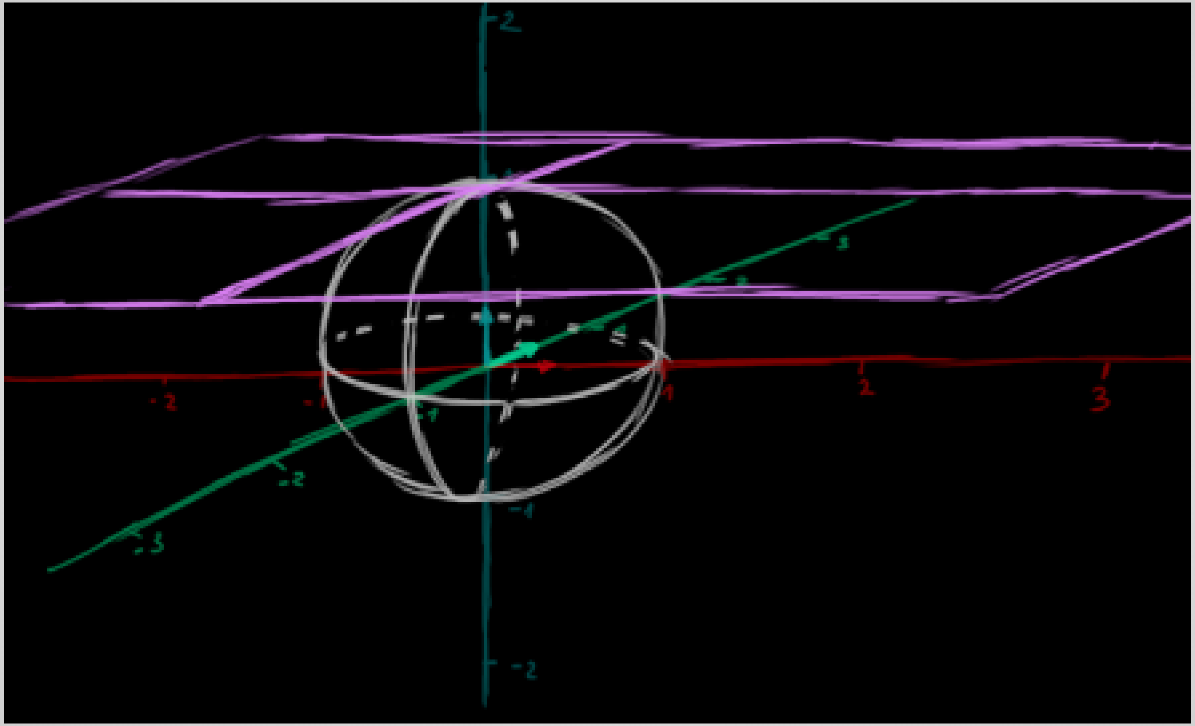
Sei C eine kubische Kurve in projektiver Ebene $\mathbb{P}^2$ mit $\mathcal{O}$, einem rationalen Punkt auf C. Verändere/wähle Achsen so, dass wir eine einfachere Form erhalten.



Schritt 2

Wir nehmen die Tangente von $\mathcal{O}$ und verwenden sie als unser $Z = 0$, also unsere Z-Achse.



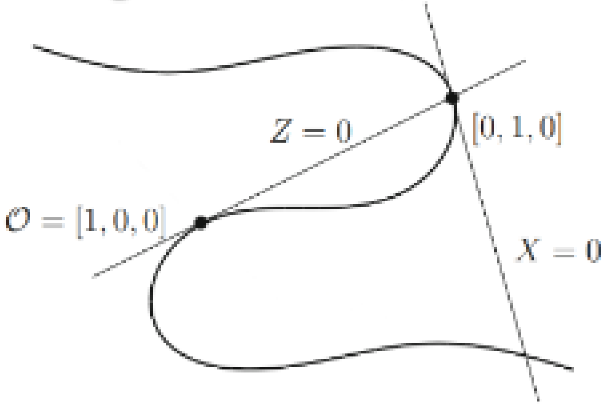


< wnf_konstruktion_2.1 >

Schritt 3

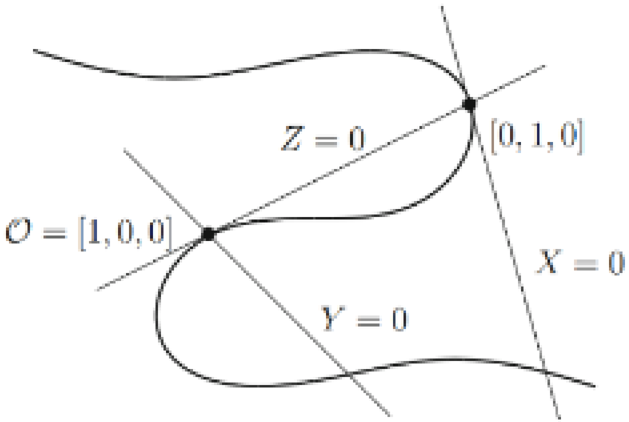
Diese Tangente schneidet die Kurve an einer weiteren Stelle $(0:1:0)$ und die Tangente an dieser Stelle wird unsere X-Achse.

Wenn $\mathcal{O}$ ein Wendepunkt (point of inflection) ist, können wir eine beliebige Gerade wählen, welche nicht durch $\mathcal{O}$ geht.



Schritt 4

Zuletzt wählen wir noch eine beliebige Gerade, welche durch $\mathcal{O}$ geht als unsere Y-Achse



Schritt 5

$$\underbrace{x = \frac{X}{Z}, \quad y = \frac{Y}{Z}}_{\text{Projektive Transformation}}$$

Neue Form der Gleichung:

$$xy^2 + (ax + b)y = cx^2 + dx + e$$

Auf beiden Seiten mit x multiplizieren:

$$(xy)^2 + (ax + b)xy = cx^3 + dx^2 + ex$$

Schritt 6

Benenne xy in y um:

$$y^2 + (ax+b)y = cx^3 + dx^2 + ex$$

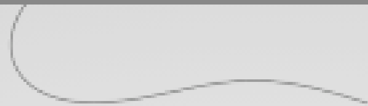
Benenne $\left(y - \frac{ax+b}{2}\right)$ in y (lineare Transformation) um, was effektiv durch **quadratische Ergänzung** unser Resultat:

$$y^2 = \text{kubische Funktion in } x$$

Schritt 6 - Extra

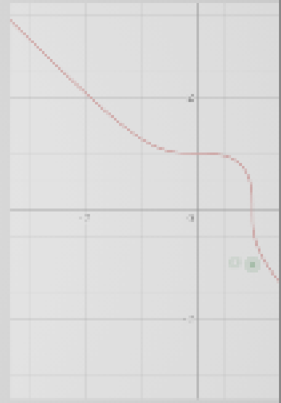
Leitkoeffizient λ muss nicht 1 sein, doch wir können x mit λx und y mit $\lambda^2 y$ substituieren.

Man kann auch x^2 Term durch Substitution von x mit $x - a$ entfernen.



Betrachten wir ein Beispiel:

$$u^3 + v^3 = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{Q}$$



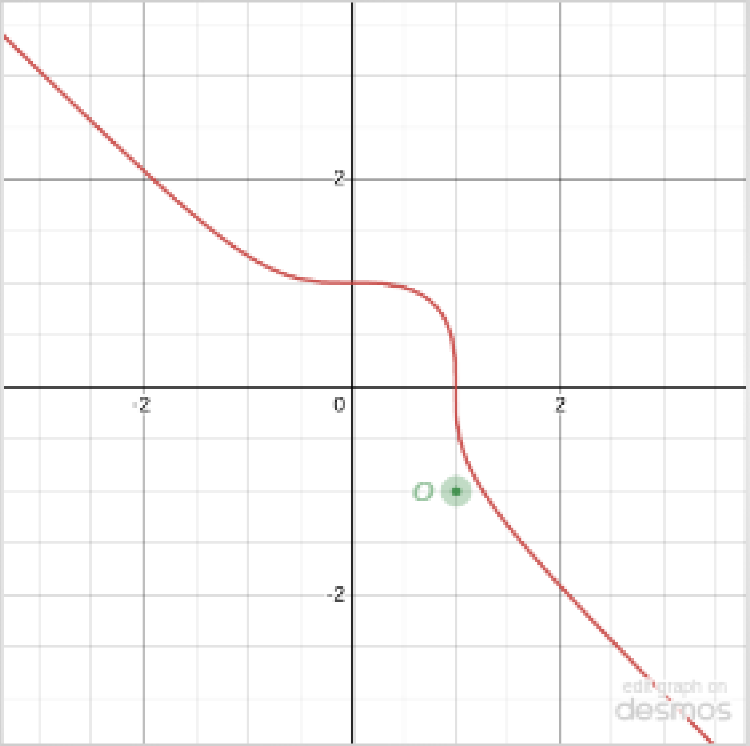
Schritt 1

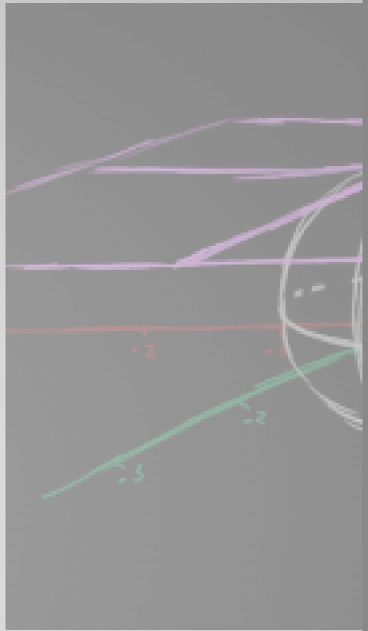
Projektivieren: $U^3 + V^3 = \alpha W^3$
Finde $\mathcal{O} = (1 : -1 : 0)$
Weil $\mathcal{O}$ ein Inflektionspunkt ist, können wir $X = 0$ fast frei wählen

Schritt 2

Durch Umformungen erk
erfüllen:

< wnf_beispiel_0 >





< wnf_beispiel_0_graph >

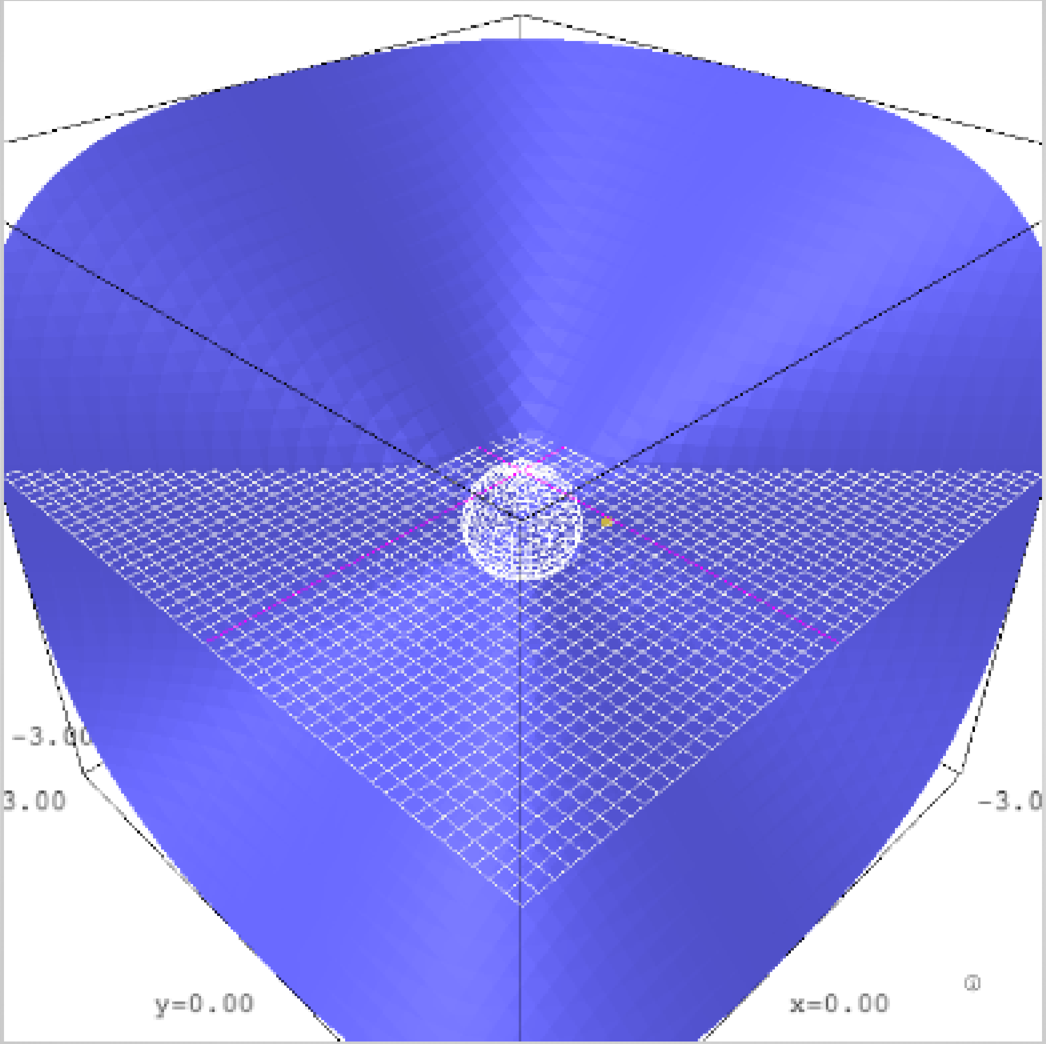
▸

Schritt 1

- Projektivieren: $U^3 + V^3 = \alpha W^3$
- Finde $\mathcal{O} = (1 : -1 : 0)$
- Weil $\mathcal{O}$ ein Inflektionspunkt ist, können wir $X = 0$ fast frei wählen

Wir erhalten:

$$x = \frac{12\alpha}{u+v}, \quad y = 36\alpha\frac{u-v}{u+v}$$



< wnf_beispiel_1_graph >

Schritt 2

Durch Umformungen erkennen wir, dass x, y die WNF erfüllen:

$$y^2 = x^3 - 432\alpha^2$$

Explizit können wir dies nachprüfen, indem wir u, v einsetzen:

$$-\frac{1728\alpha^3}{(u+v)^3} + \frac{1296\alpha^2(u-v)^2}{(u+v)^2} + 432\alpha^2$$

Ausmultiplizieren ergibt:

$$-\frac{1728\alpha^3}{u^3+3u^2v+3uv^2+v^3}+\frac{1296\alpha^2u^2}{u^2+2uv+v^2}$$
$$-\frac{2592\alpha^2uv}{u^2+2uv+v^2}+\frac{1296\alpha^2v^2}{u^2+2uv+v^2}+432\alpha^2$$

Und zuletzt Vereinfachen:

$$\frac{1728\alpha^2\left(-\alpha+u^3+v^3\right)}{u^3+3u^2v+3uv^2+v^3}$$

Wir sehen also, dass wenn $y^2=x^3-432\alpha^2$ eine Lösung hat, so auch $u^3+v^3=\alpha$.

Schritt 3

Wir können den Prozess auch rückwärts gehen und u, v durch x, y darstellen, mit:

$$u = \frac{36\alpha + y}{6x}, \quad v = \frac{36\alpha - y}{6x}$$

Wenn wir rationale Lösungen für $y^2 = x^3 - 432\alpha^2$ haben, so haben wir auch rationale Lösungen für $u^3 + v^3 = \alpha$ und umgekehrt auch.

Es gibt nur endlich viele Ausnahmen (z.B. wenn $u = -v$) aber diese sind schnell zu finden.

Fazit:

Rationale Punkte auf C stehen **1:1** zu rationale Punkte auf WNF von C für jede kubische Kurve C

(Bis auf endlich viele Ausnahmen)

Rückblick

Das Problem der **rationalen Punkte auf kubischen Kurven** mit mindestens einem rationalen Punkt wurde **deutlich einfacher**!
Wir müssen nur noch die **rationalen Punkte auf der WNF** betrachten!

Transformationen haben gerade Linien **nicht** auf gerade Linien geschickt.

Wird Gruppenstruktur (siehe. Seminar Daniel) erhalten? Ja! Unsere Transformationen sind also ein (nicht trivialer) Gruppenhomomorphismus.

Additionsgesetz ist intrinsisch zur Kurve, also **invariant unter birationaler Transformation**.

Geschichte

"Elliptische Kurven" (birational äquivalent zu $y^2 = f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ mit $f(x)$ verschiedene komplexe Wurzeln) entsprangen dem Errechnen der Bogenlänge von Ellipsen.

Um Länge von Ellipse zu berechnen, muss man eine Funktion $y = \sqrt{f(x)}$ integrieren.

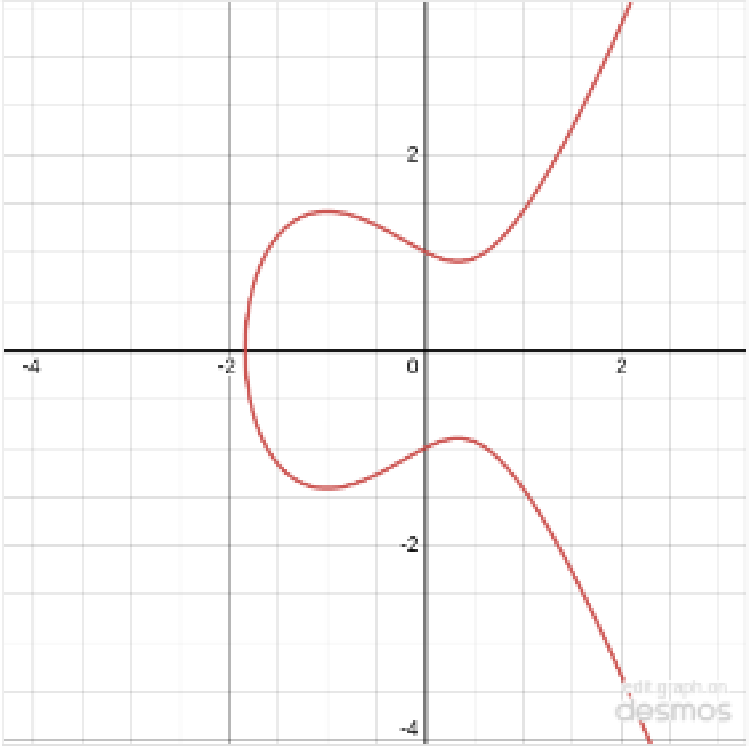
Durch

$$y^2 = \underbrace{x^3 + ax^2 + bx + c}_{f(x)}, \quad a, b, c \in \mathbb{Q}$$

können wir elliptische Kurven genauer verstehen

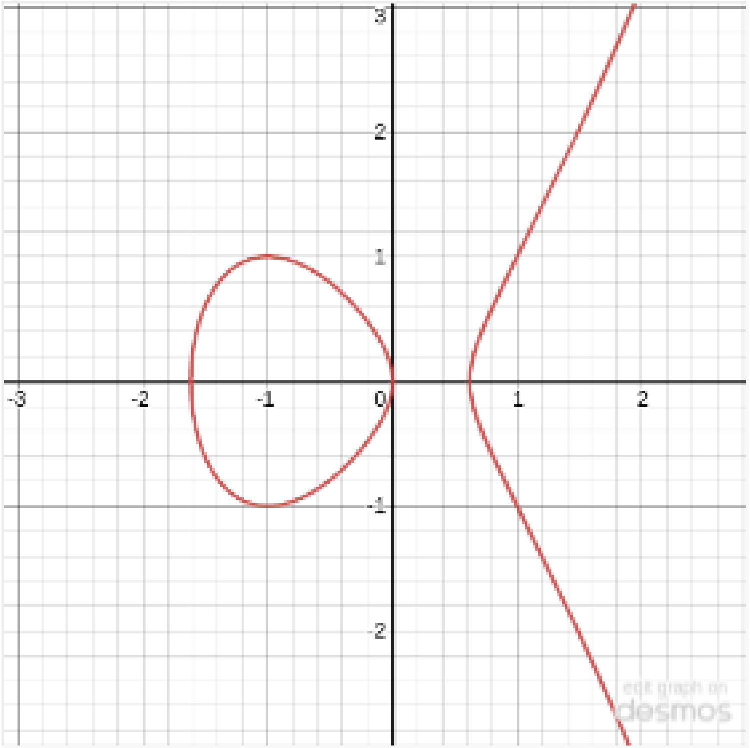
Für eine elliptische Kurve muss also $f(x)$ verschiedene (komplexe) Wurzeln haben. Aber wieso?

Nach Klassifikation der irreduziblen Polynome in $\mathbb{R}[x]$ muss $f(x)$ mindestens eine relle Wurzel α haben.



< elliptische_Kurven_1 >

$f(x)$ kann jedoch auch 3 relle Wurzeln haben. Dann haben wir zwei zusammenhängende Teilmengen. (Angenommen Wurzeln sind paarweise verschieden)



< elliptische_Kurven_2 >

Wenn Wurzeln nicht paarweise verschieden sind, also $f(x)$ **nicht quadratfrei** ist, so muss die Kurve:

$$C : \underbrace{y^2 - f(x)}_{F(x,y)} = 0$$

Singularitäten besitzen!

Beweis

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -f'(x), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2x$$

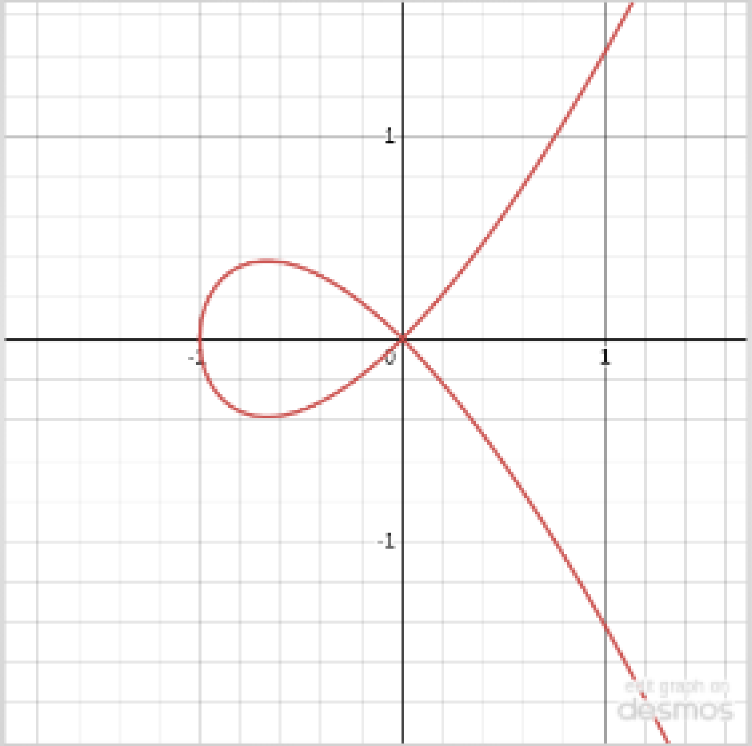
Singularitäten können also nur auf der x-Achse vorkommen. Also wenn (x_0, y_0) Singularität, so $y_0 = 0$.

Daher $f(x_0) = y_0^2 = 0$ und $f(x)$ und $f'(x)$ haben gemeinsame Wurzel bei x_0.

Welche **Arten von Singularitäten** können auftreten?

$f(x)$		
doppelte Wurzel		dreifache Wurzel
reelle Richtungen der Tangenten	komplexe Richtungen der Tangenten	

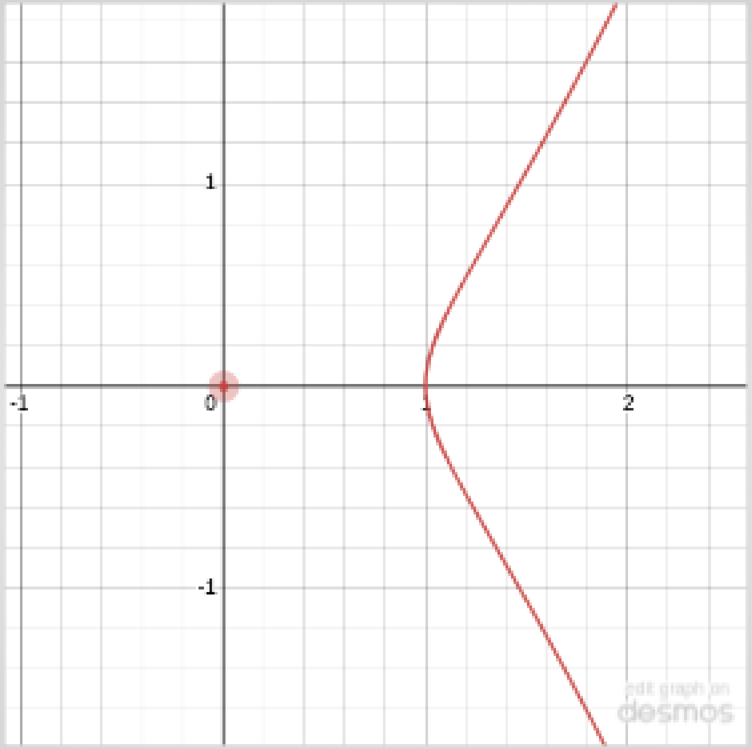
$$y^2 = x^2(x+1)$$



doppelte Wurzel - zwei reelle Tangenten

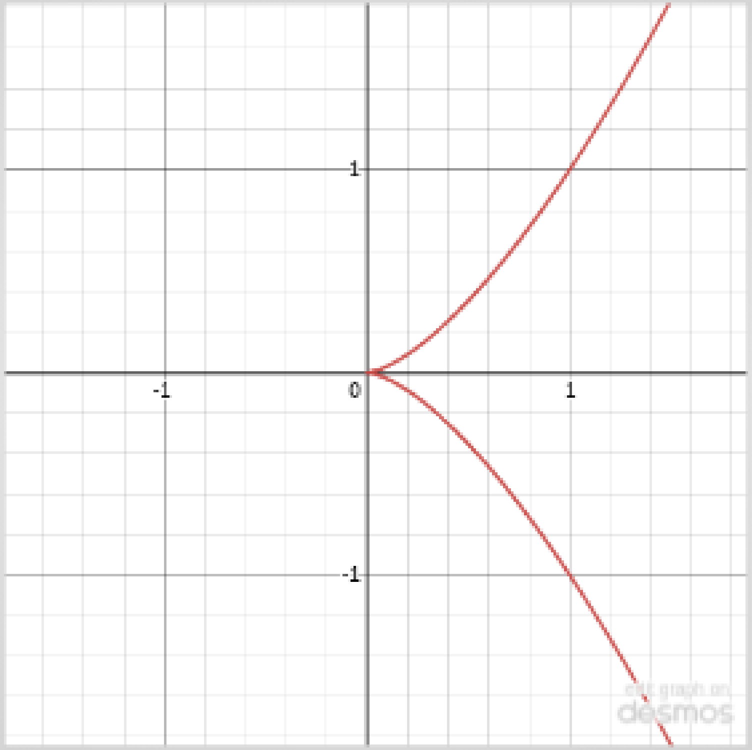
< moegliche_singularitaeten_1 > ▸

$$y^2 = x^2(x-1)$$



doppelte Wurzel - zwei komplexe Tangenten

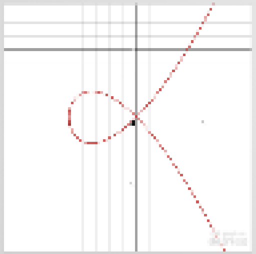
$$y^2 = x^3$$



dreifache Wurzel

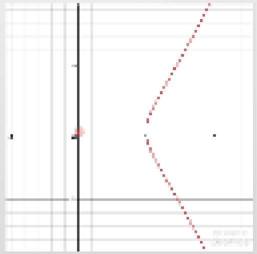
$f(x)$		
doppelte Wurzel		dreifache Wurzel
reelle Richtungen der Tangenten	komplexe Richtungen der Tangenten	

$$y^2 = x^2(x-1)$$



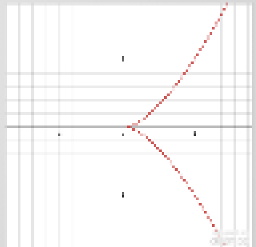
doppelte Wurzel - zwei reelle Tangenten

$$y^2 = x^2(x-1)$$



doppelte Wurzel - zwei komplexe Tangenten

$$y^2 = x^3$$



dreifache Wurzel

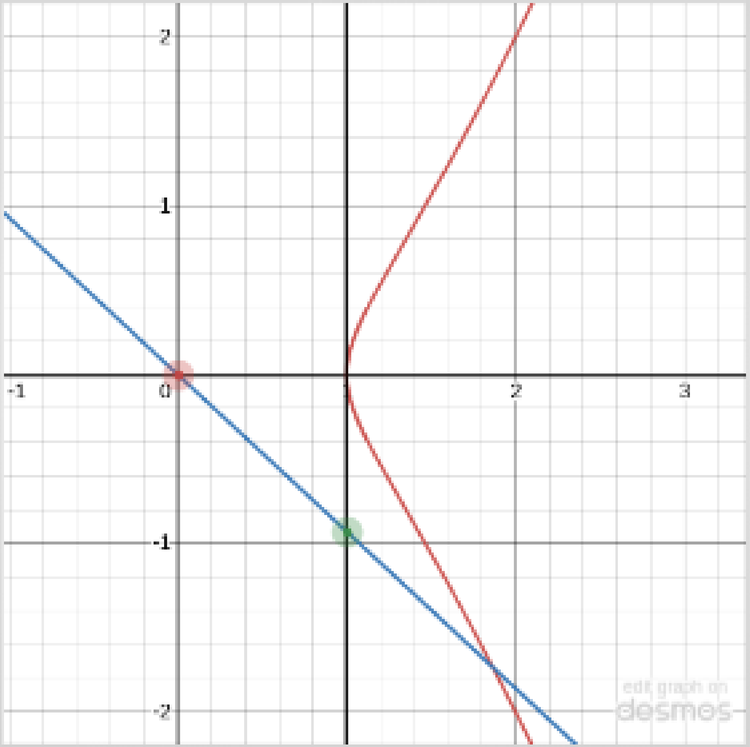
Kegelschnitte und Singularitäten

Sei L eine Gerade, welche durch den singulären Punkt P geht. L schneidet nur einen weiteren Punkt auf der Kurve C, da L bereits P doppelt schneidet.

Wir können also die Schnittpunkte von L betrachten. Das ergibt eine **Projektion der Kurve C auf eine Gerade**, welche bijektiv ist.

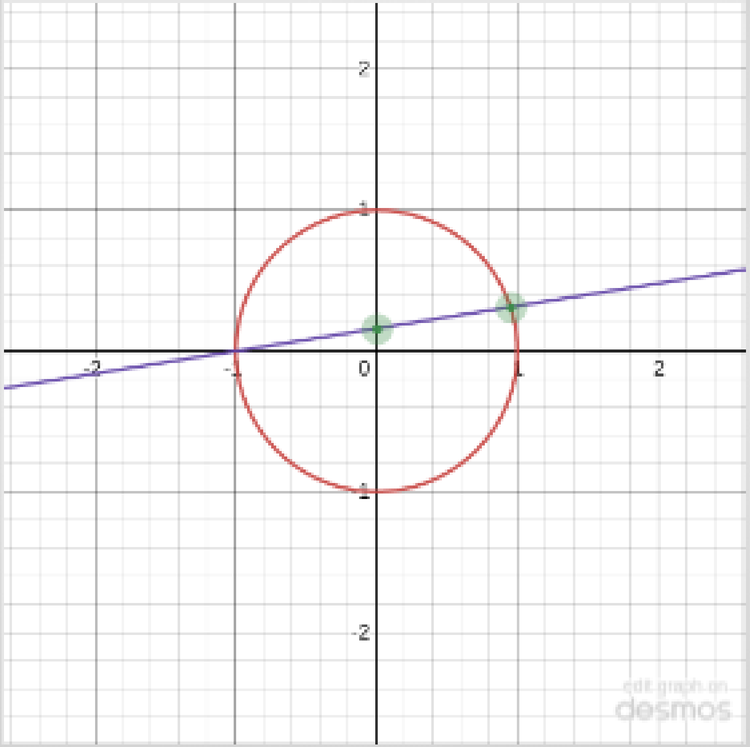
Korrelation zu Kegelschnitten, wo die rationalen Punkte auch 1:1 zu den Punkten auf einer Gerade im Verhältnis stehen!

$$y^2 = x^2(x-1)$$



< elliptische_Kurven_4.1 >

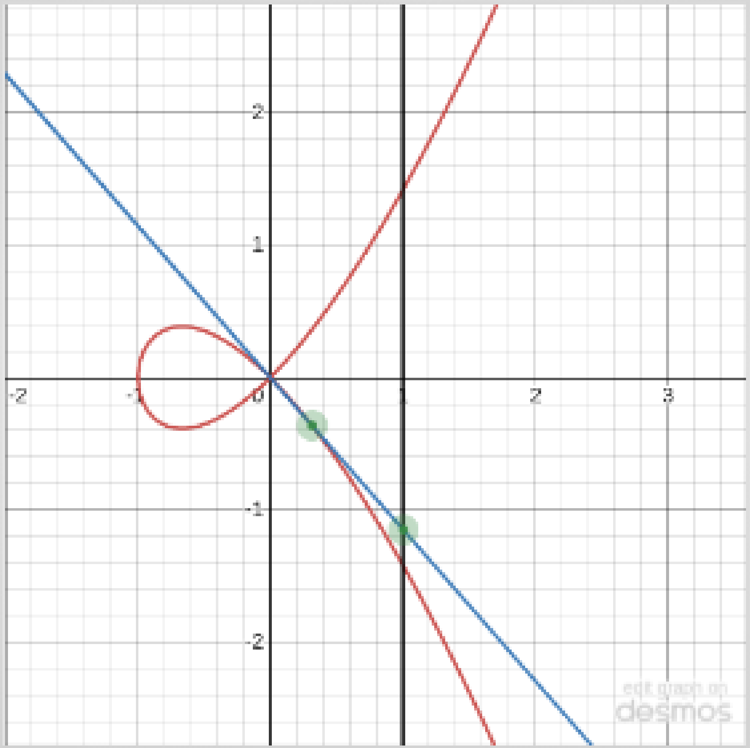
$$y^2 + x^2 = 1$$



< elliptische_Kurven_4.2 >

Geg

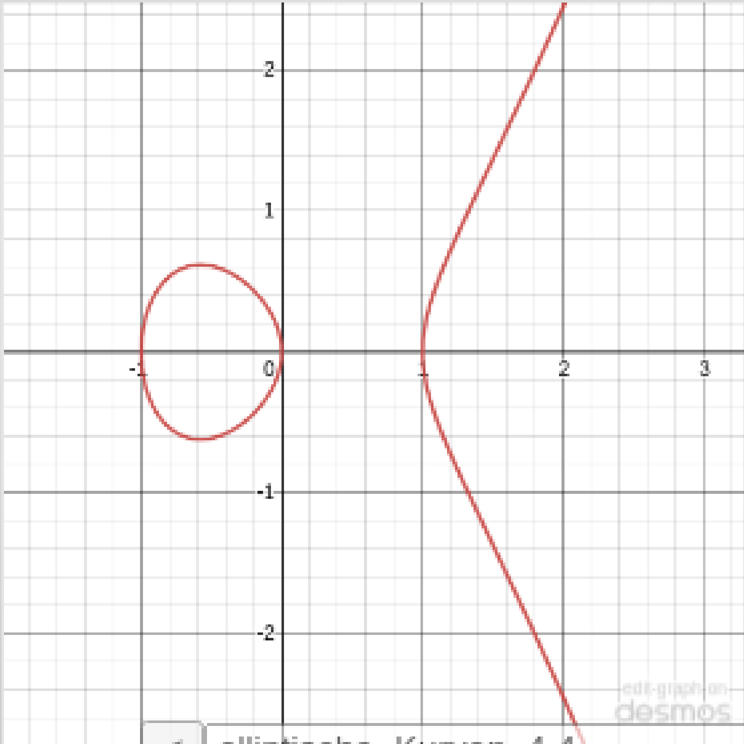
$$y^2 = x^2(x+1)$$

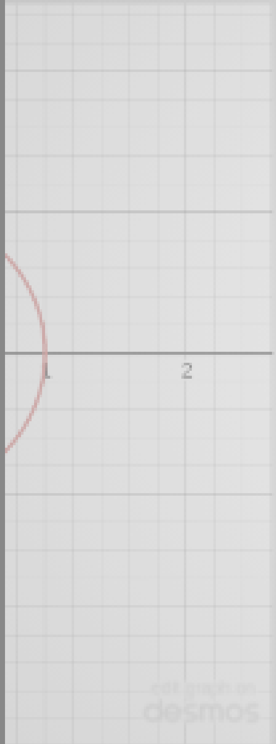


< elliptische_Kurven_4.3 >

Gegenbeispiel

$$y^2 = x^3 - x$$





< elliptische_Kurven_4.4 >

1.4

Explicit Formulas for the Group Law

< title2 > ▸

Point at infinity

Betrachte wieder kubische Kurve

$$y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$$

Und ihre Projektivierung

$$Y^2Z = X^3 + aX^2Z + bXZ^2 + cZ^3$$

Wenn wir $Z = 0$ setzen, so sehen wir nur noch die Nullstellen auf der **line at infinity**.

$$Y^2 \cdot 0 = X^3 + aX^2 \cdot 0 + bX \cdot 0^2 + c \cdot 0^3$$

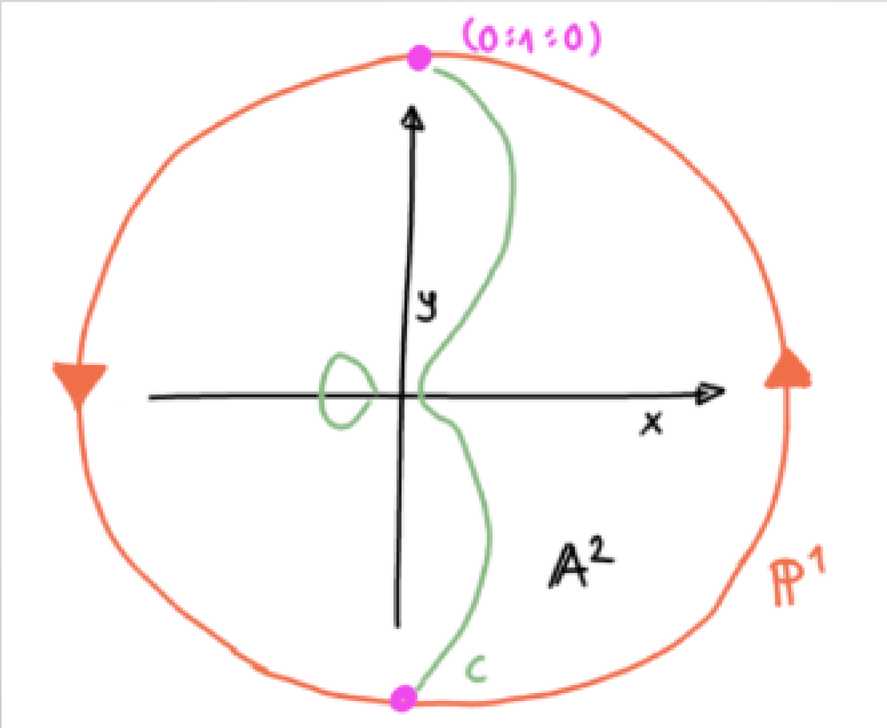
$$\Leftrightarrow 0 = X^3$$

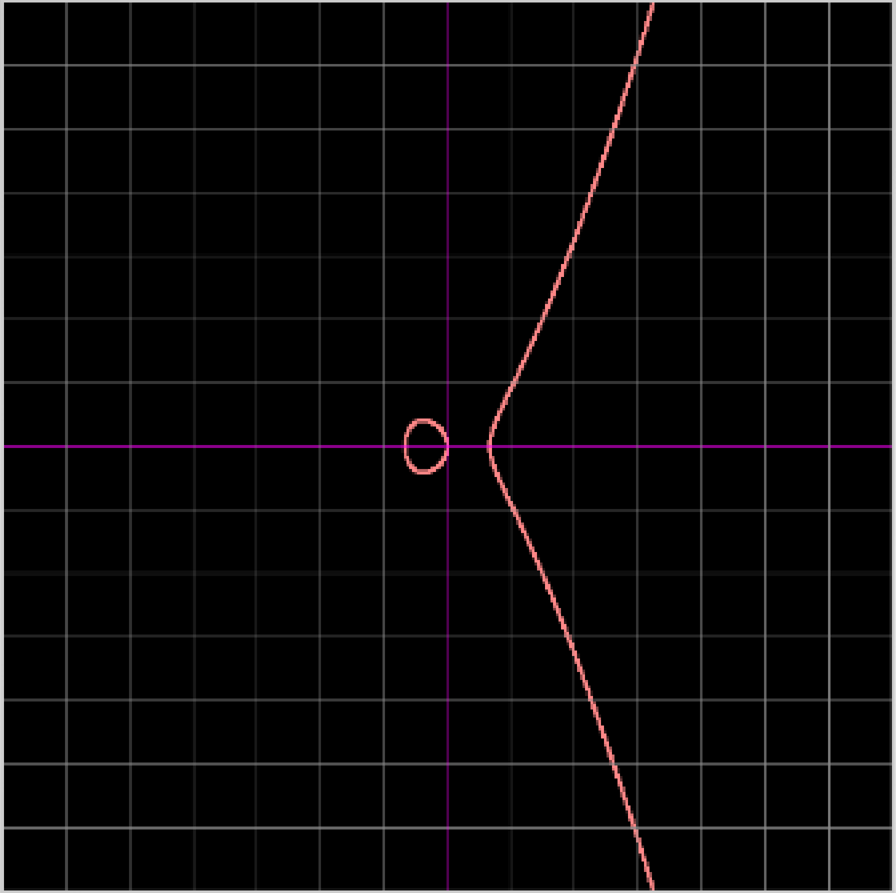
Wir erkennen also, dass es auf der line at infinity nur eine **dreifache Nullstelle** gibt!

$X = 0,\ Z = 0$ korrespondiert zu $\mathcal{O} = (0 : 1 : 0)$, also den vertikalen Linien, wenn man $\mathbb{P}^2 = \mathbb{A}^2 \dot\cup \mathbb{P}^1$ als Koprodukt auffasst.

Beispiel

$y^2 = x(x-1)(x+1)$





Tipp: nahe heranzoomen und mit Maus Kamera zur Seite drehen.

Quelle

< point_at_infinity_1.2 > ▸

Point at infinity - nicht singulär (1)

$$P = Y^2Z - X^3 - aX^2Z - bXZ^2 - cZ^3$$

Berechne Ableitungen

$$\frac{\partial P}{\partial X} = -9X^2 - 2aXZ - bZ^2$$
$$\frac{\partial P}{\partial Y} = 2YZ$$
$$\frac{\partial P}{\partial Z} = Y^2 - aX^2 - 2bXZ - 3Z^2$$

Point at infinity - nicht singulär (2)

$$P = Y^2Z - X^3 - aX^2Z - bXZ^2 - cZ^3$$

Ableitungen für $\mathcal{O}$ ausrechnen

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial P}{\partial X}, \frac{\partial P}{\partial Y}, \frac{\partial P}{\partial Z},\right)(\mathcal{O}) &= (0,0,1) \\ &\neq (0,0,0)\end{aligned}$$

Somit ist $\mathcal{O}$ **kein** singulärer Ort!

*Er ist jedoch ein Wendepunkt (point of inflection) und wir behandeln $\mathcal{O}$ als einen rationalen Punkt.

Betrachten wir nun das **Gruppengesetz** mit $\mathcal{O}$ als Einheit

Informationen zu $\mathcal{O}$

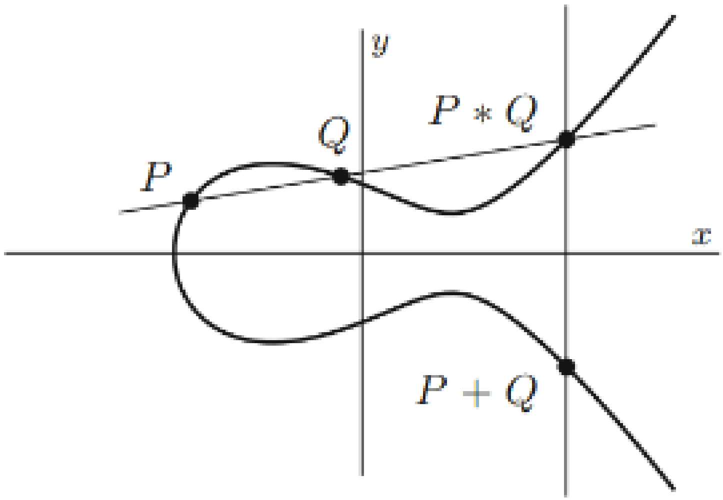
Weil kubische Kurve birational äquivalent zu WNF, können wir von nur einem Punkt im unendlichen ausgehen: $\mathcal{O}$, weil $X = 0$ dreifache nullstelle bei $Z = 0$.

Somit können wir elliptische Kurve unverändert im affinen Raum als Lösungen (x, y) zusammen mit $\mathcal{O}$ betrachten.

Interessanter Nebeneffekt: Jede Gerade schneidet nun immer unsere Kurve in genau drei Punkten!

Addition von Punkten mit $\mathcal{O}$ als Einheit

$$+ : C \times C \to C,$$
$$P + Q = (P * Q) * \mathcal{O}$$



Addition von Punkten mit $\mathcal{O}$ als Einheit - Beweis

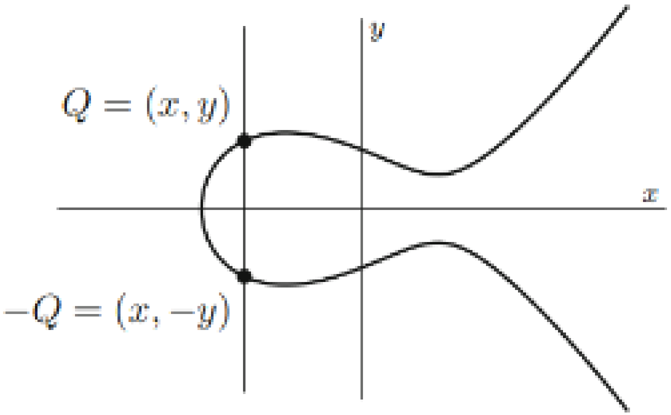
Beachte, dass $\mathcal{O}$ unter $\mathbb{P}^2 = \mathbb{A}^2 \dot{\cup} \mathbb{P}$ den vertikalen Geraden entspricht. Somit ist $S * \mathcal{O}$ eine Reflektion entlang der x-Achse, da **WNF** stets Achsensymmetrisch ist.

Siehe folgende Grafiken:

- Weierstraß Normalform Konstruktion - Grafik
- Point at infinity - Grafik

Negation von Punkten mit $\mathcal{O}$ als Einheit

$$- : C \to C,$$
$$-(x, y) = (x, -y)$$



< gruppengesetz_2_negation >

Negation von Punkten mit $\mathcal{O}$ als Einheit - Beweis

$$Q + (-Q) = (Q * (Q * \mathcal{O})) * \mathcal{O}$$

Wobei $(Q * \mathcal{O})$ der Reflektion entlang der x-Achse entspricht.

Der einzige Punkt, welcher von Gerade durch Q und $-Q$ geht, ist der Punkt im unendlichen $\mathcal{O}$.

Die Gerade durch den Punkt im unendlichen und den Punkt im unendlichen trifft nur den Punkt im unendlichen. Siehe: **diese Grafik**

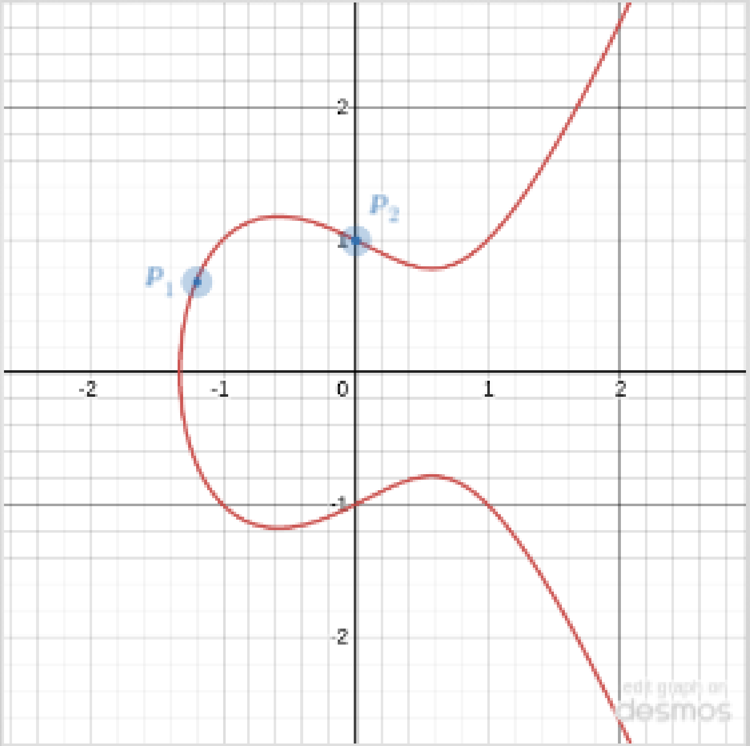
Wir möchten dies nun **effizient realisieren**!

Wir brauchen:

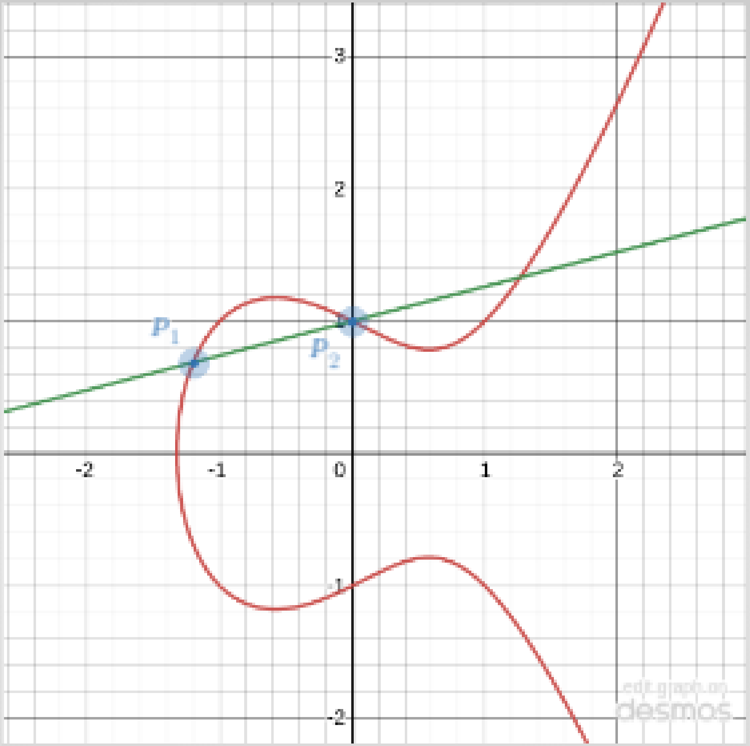
- $P_1 = (x_1, y_1)$
- $P_2 = (x_2, y_2)$
- $P_1 * P_2 = (x_3, y_3)$
- $P_1 + P_2 = (x_3, -y_3)$

Unter Annahme, dass nur Punkte aus $\mathbb{A}^2$ addiert werden sollen!

Startsituation



< gruppengesetz_3_realisierung_Gegeben_Grafik >

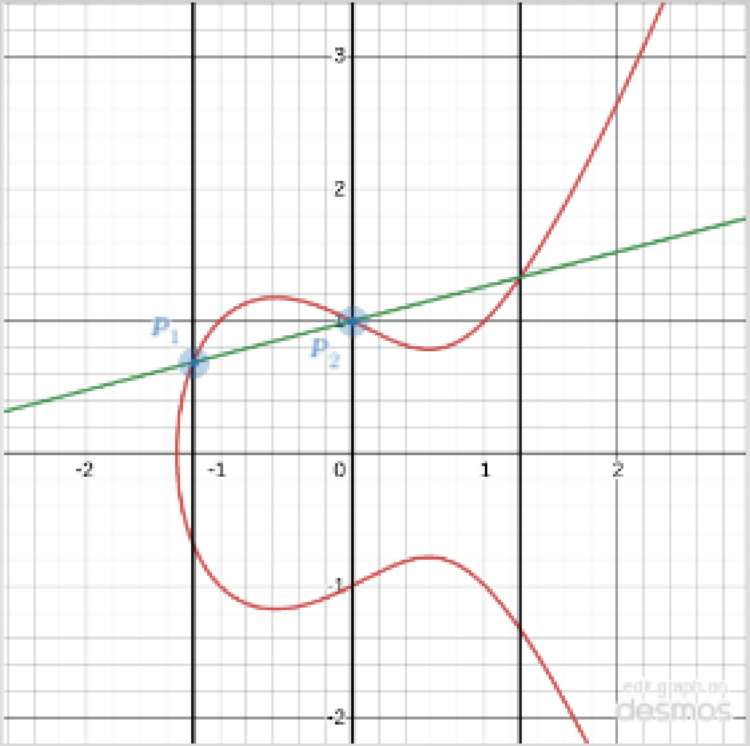


$$\text{Sekante}_{P_1,P_2}(t) = \lambda t + \nu$$

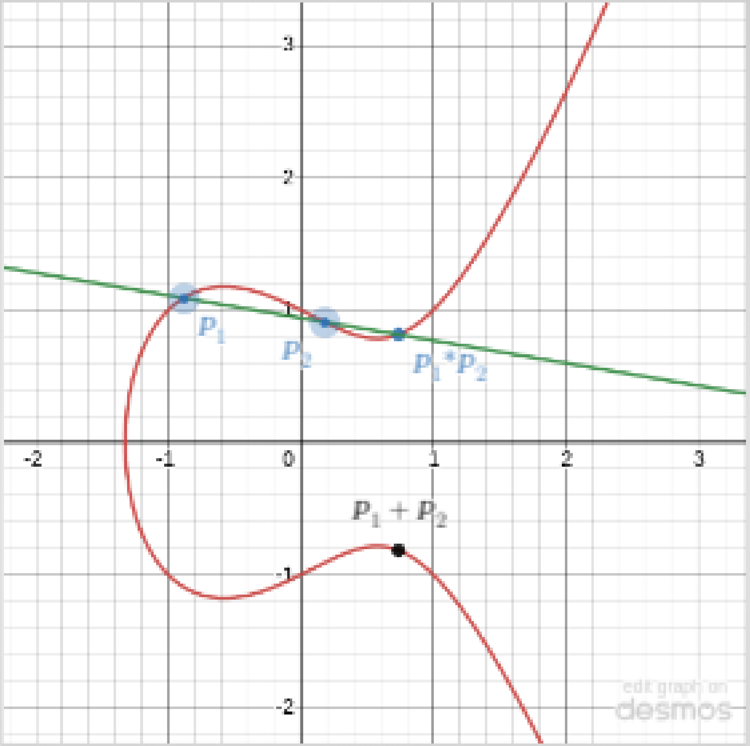
mit

$$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_2}$$

$$\nu = y_1 - \lambda x_1 = y_2 - \lambda x_2$$



$$
\begin{aligned}
&S(x)^2 = x^3 + ax^2 + bx + c \\
\Leftrightarrow &0 = x^3 + (a - \lambda^2)x^2 + (b - 2\lambda\nu)x + (c - \nu^2) \\
\Leftrightarrow &0 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x3)
\end{aligned}
$$



$$x_3 = \lambda^2 - a - x_1 - x_2, \quad y_3 = \lambda x_3 + \nu$$

Was ist mit $\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, wenn P_1 und P_2 der selbe Punkt sind?

Wir betrachten Tangente statt Sekante. Durch **implizite Differenzierung** setzen wir

$$\lambda = \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{P_0} = \frac{f'(x_0)}{2y_0}$$

Wir haben auch die explizite **duplication Formula**, "dup" welche für einen Punkt $P = (x, y)$ die Berechnung der x-Coordinate von $2P = P + P$ erleichtert:

$$\begin{aligned} &2(x,y) = (\mathrm{dup}(x,y), -\mathrm{sign}(x,y)\sqrt{\mathrm{dup}(x,y)}) \\ &\qquad \text{mit} \\ &\qquad \mathrm{dup}(x,y) = \frac{x^4 - 2bx^2 - 8cx + b^2 - 4ac}{4x^3 + 4ax^2 + 4bx + 4c} \\ &\qquad \mathrm{sign}(x,y) = \mathrm{sign}(y) \end{aligned}$$

Basierend auf "Rational Points on Elliptic Curves" von Joseph H. Silverman und John T. Tate.
Weitere nützliche Projekte (100% von mir geschrieben) zu diesem Thema:

- **Projective elliptic curve plotter**
- **(komplexe) algebraische Mengen Visualisator**
- **Projektive Plane**
- **Projektive Transformation einer Elliptischen kurve animiert** (Leertaste drücken!)

Tipp: Klicken Sie auf "desmos" in den Grafiken um mit den Parametern dieser zu interagieren!