Vortrag 3: Division von surrealen Zahlen

Seminar zur Modelltheorie - surreale Zahlen - Wintersemester 2023/24

Luca Leon Happel

$\boldsymbol{No}$ ist ein Körper

Recap: Addition und Multiplikation surrealer Zahlen

1. Definition von $\boldsymbol{No}$ als Menge aller Formen $x = \{L|R\}$ mit $L, R \subset \boldsymbol{No}$ und $L < R$.
2. Definition von $a + b = \{a^L + b, a + b^L | a^R + b, a + b^R\}$.
   - x^L bedeutet: $\forall x^L \in L$, $x = \{L|R\}$
   - x^R bedeutet: $\forall x^R \in R$, $x = \{L|R\}$
   - Erste Definition auf 3.A "Addition" (Gonshor, 1986)
   - (Florian L)Vortrag 2: Die surrealen Zahlen bilden einen angeordneten Ring[1]
3. Definition von $a \cdot b = \{a^L \cdot b + a \cdot b^L - a^L \cdot b^L, a^R \cdot b + a \cdot b^R - a^R \cdot b^R | a^L \cdot b + a \cdot b^R - a^L \cdot b^R, a^R \cdot b + a \cdot b^L - a^R \cdot b^L\}$.

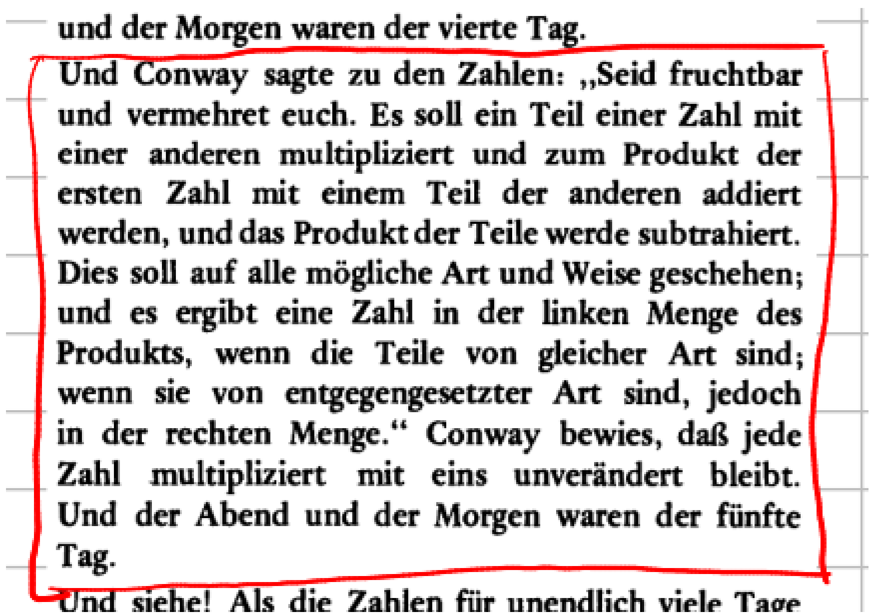

und der Morgen waren der vierte Tag.
Und Conway sagte zu den Zahlen: „Seid fruchtbar und vermehret euch. Es soll ein Teil einer Zahl mit einer anderen multipliziert und zum Produkt der ersten Zahl mit einem Teil der anderen addiert werden, und das Produkt der Teile werde subtrahiert. Dies soll auf alle mögliche Art und Weise geschehen; und es ergibt eine Zahl in der linken Menge des Produkts, wenn die Teile von gleicher Art sind; wenn sie von entgegengesetzter Art sind, jedoch in der rechten Menge.“ Conway bewies, daß jede Zahl multipliziert mit eins unverändert bleibt. Und der Abend und der Morgen waren der fünfte Tag.
Und siehe! Als die Zahlen für unendlich viele Tage

Figure 1: Ein lustiges Zitat über die Multiplikation surrealer Zahlen aus "Insel der Zahlen" (Knut)

   -
   - x^L und x^R wie oben.
   - Zweite Definition auf 3.B "Multiplikation" (Gonshor, 1986)
   - Vortrag 2 (Florian L): Die surrealen Zahlen bilden einen angeordneten Ring
4. Definition von $a < b \Leftrightarrow a^R < b \wedge a < b^L$.
   - x^L und x^R wie oben.
   - Vortrag 1 (Stefan S): Definition der surrealen Zahlen[2]

[1] Florian L.: Die surrealen Zahlen bilden einen angeordneten Ring, Vortrag 2
[2] Stefan S.: Definition der surrealen Zahlen, Vortrag 1

5. $\boldsymbol{No}$ ist ein geordneter, kommutativer Ring mit Eins
    - Multiplikative Einheit ist $1 = \{0|\}$
    - Additive Einheit ist $0 = \{|\}$
    - Theorem 3.6 (Gonshor, 1986)
    - Vortrag 2 (Florian L): Die surrealen Zahlen bilden einen angeordneten Ring

Motivation

1. relle Divisionsalgebra

   Theorem 2B.5[3]. $\mathbb{R}$ and $\mathbb{C}$ are the only finite-dimensional division algebras over $\mathbb{R}$ which are commutative and have an identity

   Theorem 2B.5. $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ and $\mathbb{O}$ are the only finite-dimensional division algebras over $\mathbb{R}$ which are associative and have an identity

(Hatcher: Algebraic Topology)

Interressant: $\boldsymbol{No}$ ist sogar eine **kommutative** und **assoziative**, unendlich-dimensionale Division-Algebra über $\mathbb{R}$.

2. Alle georneten, divisiblen abelschen Gruppen sind in $\boldsymbol{No}$ enthalten

   Theorem 5 (Ehrlich[4]). Every divisible ordered abelian group is isomorphic to a recursively defined initial subgroup of $\boldsymbol{No}$

Division auf $\boldsymbol{No}$ zu verstehen, bringt somit mit sich, dass man alle divisiblen, geordneten, abelschen Gruppen "versteht".

3. Hyperrelle Zahlen

   Theorem 4 (Ehrlich[5]). Every real-closed ordered field is isomorphic to a recursively defined initial subfield of $\boldsymbol{No}$

Insbesondere wichtig, weil Hyperreelle Zahlen $\mathbb{R}^*$ real-abgeschlossen sind. Die "infinitessimale" $\frac{1}{\omega}$ sind somit wirklich infinitesimal. Durch Division können wir also zwischen den Größenordnungen der surrealen Zahlen "herumhüpfen".

Beispiele für Inverse

1. Ist $\frac{1}{0} \in \boldsymbol{No}$ definiert?

Nein, denn $\boldsymbol{No}$ ist ein Ring nach Vortrag 2. Somit $\forall x \in \boldsymbol{No} : x \cdot 0 = 0$.

2. $\frac{1}{2} \cdot 2 = 1$?

Ja! Wurde bereits im letzten Vortrag gezeigt. Hier noch ein mal der Beweis:

[3] HATCHER, ALLEN. ALGEBRAIC TOPOLOGY. CORNELL UNIVERSITY, 2001, https://pi.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html. Accessed 4 Nov. 2023.

[4] EHRLICH, PHILIP. "THE ABSOLUTE ARITHMETIC CONTINUUM AND THE UNIFICATION OF ALL NUMBERS GREAT AND SMALL." The Bulletin of Symbolic Logic, vol. 18, no. 1, 2012, pp. 1–45. JSTOR, http://www.jstor.org/stable/41472439. Accessed 4 Nov. 2023.

[5] EHRLICH, PHILIP. "THE ABSOLUTE ARITHMETIC CONTINUUM AND THE UNIFICATION OF ALL NUMBERS GREAT AND SMALL." The Bulletin of Symbolic Logic, vol. 18, no. 1, 2012, pp. 1–45. JSTOR, http://www.jstor.org/stable/41472439. Accessed 4 Nov. 2023.

Beweis:

$$
\begin{aligned}
x &= 2 = \{1|\} \\
y &= \frac{1}{2} = \{0|1\} \\
x \cdot y &= \{\underbrace{1}_{x^L} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}}_{y} + \underbrace{2}_{x} \cdot \underbrace{0}_{y^L} - \underbrace{1}_{x} \cdot \underbrace{0}_{y}, \underbrace{\emptyset}_{\nexists x^R} | \underbrace{\emptyset}_{\nexists x^R}, 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot 1 - 1\} \\
&= \{\frac{1}{2}|1 + \frac{1}{2}\} = 1
\end{aligned}
$$

Hierbei verwenden wir $\{\frac{1}{2}|1 + \frac{1}{2}\} = 1$. Das beweisen wir aber auch noch kurz:

Beweis:

$$
\begin{aligned}
\{\frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}\} &\geq \{0|\} \\
&\Leftrightarrow \\
\underbrace{x^R}_{1+\frac{1}{2}} \geq \underbrace{\{0|\}}_{1} \wedge \underbrace{y^L}_{0} &\leq \underbrace{\{\frac{1}{2}|1 + \frac{1}{2}\}}_{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\{0|\} \geq \{\frac{1}{2}|1 + \frac{1}{2}\} &\Leftrightarrow \\
\underbrace{x^R}_{1} \geq \{\frac{1}{2}|1 + \frac{1}{2}\} \wedge \underbrace{y^L}_{\frac{1}{2}} &\leq \underbrace{\{0|\}}_{1}
\end{aligned}
$$

(x steht immer für den Linken Teil, y für den Rechten Teil der Ungleichung)

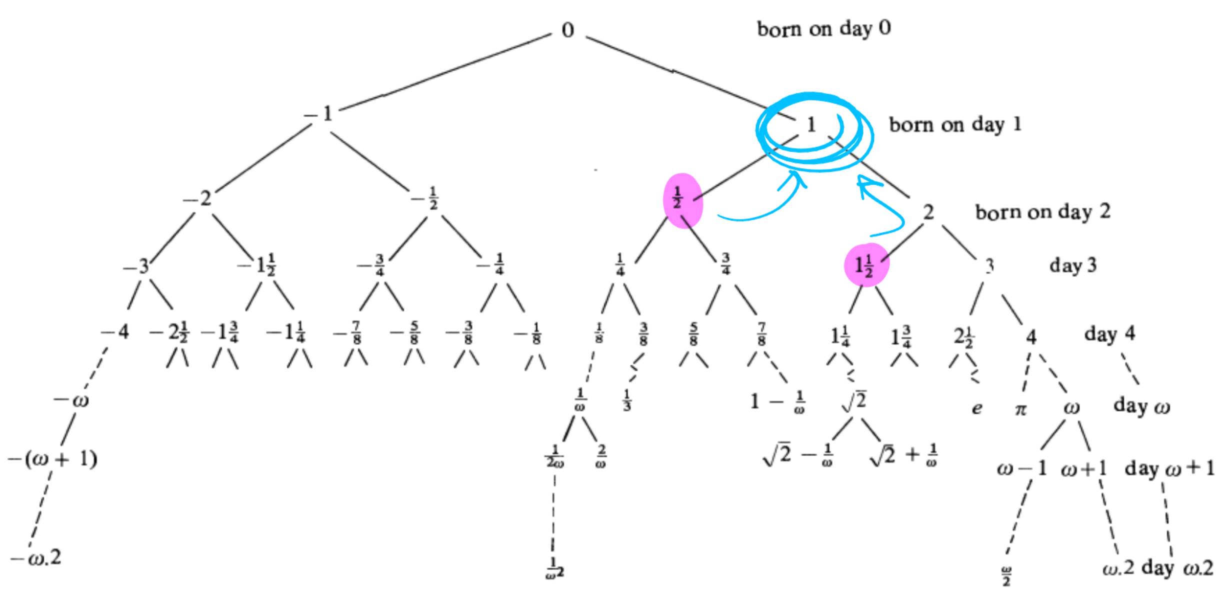


Fig. 0. When the first few numbers were born.

Visuell:

Dies ist allgemein definierbar durch die *Länge*[6] einer surrealen Zahl, zusammen mit deren Ordnung:

[6]Gonshor, H. (1986). An Introduction to the Theory of Surreal Numbers (London Mathematical Society Lecture Note Series). Cambridge: Cambridge University Press. doi:10.1017/CBO9780511629143

$$\mathrm{len}(a) := \min_{b\in \boldsymbol{On}} b \notin \mathrm{dom}(\boldsymbol{On} \xrightarrow{a} \{+,-\})$$

3. Gilt $\frac{1}{\omega}\cdot\omega = 1$?

Ja!

Beweis:

$$\begin{aligned}
x &= \omega = \{1,2,3,\dots|\} \overset{\text{Conway S. 12}}{=} \{2^n|\} \\
y &= \frac{1}{\omega} = \{0|1,2,3,\dots\} = \{0|\frac{1}{2^m}\} \\
\omega\cdot\frac{1}{\omega} &= x\cdot y = \{\underbrace{2^n}_{x^L}\cdot\underbrace{\frac{1}{\omega}}_{y} + \underbrace{\underbrace{\omega}_{x}\cdot\underbrace{0}_{y^L}}_{0} - \underbrace{\underbrace{2^n}_{x^L}\cdot\underbrace{0}_{y^L}}_{0}, \underbrace{\emptyset}_{\nexists x^R} | \underbrace{2^n}_{x^L}\cdot\underbrace{\frac{1}{\omega}}_{y} + \underbrace{\omega}_{x}\cdot\underbrace{\frac{1}{2^m}}_{y^R} - \underbrace{2^n}_{x^L}\cdot\underbrace{\frac{1}{2^m}}_{y^R}, \underbrace{\emptyset}_{\nexists x^R}\} \\
&= \{2^n\frac{1}{\omega}|2^n\cdot\frac{1}{\omega} + \omega\frac{1}{2^m} - 2^n\frac{1}{2^m}\}
\end{aligned}$$

Wir gehen nun wieder analog zu dem Beweis von $\{\frac{1}{2}|1+\frac{1}{2}\} = 1$ vor. Diesmal aber mit $\{2^n\frac{1}{\omega}|2^n\cdot\frac{1}{\omega}+\omega\frac{1}{2^m} - 2^n\frac{1}{2^m}\} \overset{!}{=} \{0|\} = 1$:

Beweis:

$$\{2^n\frac{1}{\omega}|2^n\cdot\frac{1}{\omega}+\omega\frac{1}{2^m}-2^n\frac{1}{2^m}\} \leq \{0|\}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\underbrace{\underbrace{x^R}_{2^n\cdot\frac{1}{\omega}+\omega\frac{1}{2^m}-2^n\frac{1}{2^m}} \geq \underbrace{\{0|\}}_{1}}_{\text{stimmt } \checkmark} \wedge \underbrace{\underbrace{y^L}_{0} \leq \{2^n\frac{1}{\omega}|2^n\cdot\frac{1}{\omega}+\omega\frac{1}{2^m}-2^n\frac{1}{2^m}\}}_{\text{stimmt } \checkmark}$$

$$\{2^n\frac{1}{\omega}|2^n\cdot\frac{1}{\omega}+\omega\frac{1}{2^m}-2^n\frac{1}{2^m}\} \geq \{0|\}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\underbrace{\underbrace{x^R}_{1} \geq \{2^n\frac{1}{\omega}|2^n\cdot\frac{1}{\omega}+\omega\frac{1}{2^m}-2^n\frac{1}{2^m}\}}_{\text{stimmt } \checkmark,\ (\lambda\frac{1}{\omega}<1\forall\lambda\in\mathbb{N})} \wedge \underbrace{\underbrace{y^L}_{\{2^n\frac{1}{\omega}|\}} \leq \underbrace{\{0|\}}_{1}}_{\text{stimmt } \checkmark,\ (\lambda\frac{1}{\omega}<1\forall\lambda\in\mathbb{N})}$$

Allgemeine Konstruktion von Inversen

Definition von $y = \frac{1}{x}$

> **Proposition 1':** Sei $(R,+,-,\cdot,0,1)$ ein geordneter Ring. Es gilt $\forall x\in R\setminus\{0\}\exists y\in R : x\cdot y = 1 \Leftrightarrow \forall x\in R_{>0} : \exists y\in R : x\cdot y = 1$.
>
> (1', weil dies nicht in den Büchern nummeriert ist.)

Beweis: Wenn $x > 0$ so ist dies klar. Sei $x < 0$, so gilt nach Proposition 1', dass $-x > 0$ ein Inverses y' hat. Somit gilt $-x\cdot y' = 1$. Weil (-1) eine Einheit ist, gilt $x\cdot -y' = 1$.

> **Proposition 2'** Sei $x = \{x^L|x^R\} \in \boldsymbol{No}$ mit $x > 0$. Dann gilt $x = \{0, x^L|x^R\}$ und $x^L > 0$.

Beweis: Sei $y = \{0, x^L : x^L > 0|x^R\}$ und $x = \{x^L|x^R\}$. Dann gilt $y \leq x$ und $x \leq y$ analog zu dem Beweis von $\{\frac{1}{2}|1+\frac{1}{2}\} = 1$.

Definition 3'[7] Sei $x = \{0, x^L | x^R\}\boldsymbol{No}$ mit $x > 0$. Wir definieren *doppelt induktiv*

$$y := \{0, \frac{1 + (x^R - x)y^L}{x^R}, \frac{1 + (x^L - x)y^R}{x^L} | \frac{1 + (x^L - x)y^L}{x^L}, \frac{1 + (x^R - x)y^R}{x^R}\}$$

y wird sich als Inverses von x herausstellen. *doppelt induktiv*, weil sowohl $\frac{1}{x^L}, \frac{1}{x^R}$ und y^L, y^R verwendet werden. Der Induktionsanfang ist $y = \{0|\}$.

Sanity-Check: $y \cdot 3 = 1$, $y = \frac{1}{3}$

Definition von $\frac{1}{3}$ Wir definieren

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} &:= \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{4} + \frac{1}{16}, \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64}, \dots \middle| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{8}, \dots\right\} \\ &= \left\{\frac{1}{4} + \sum_{k=3}^{n} \frac{1 + (-1)^k}{2} \frac{1}{2^k} \middle| \frac{1}{2} - \sum_{k=3}^{n} \frac{1 + (-1)^k}{2} \frac{1}{2^k}\right\}\end{aligned}$$

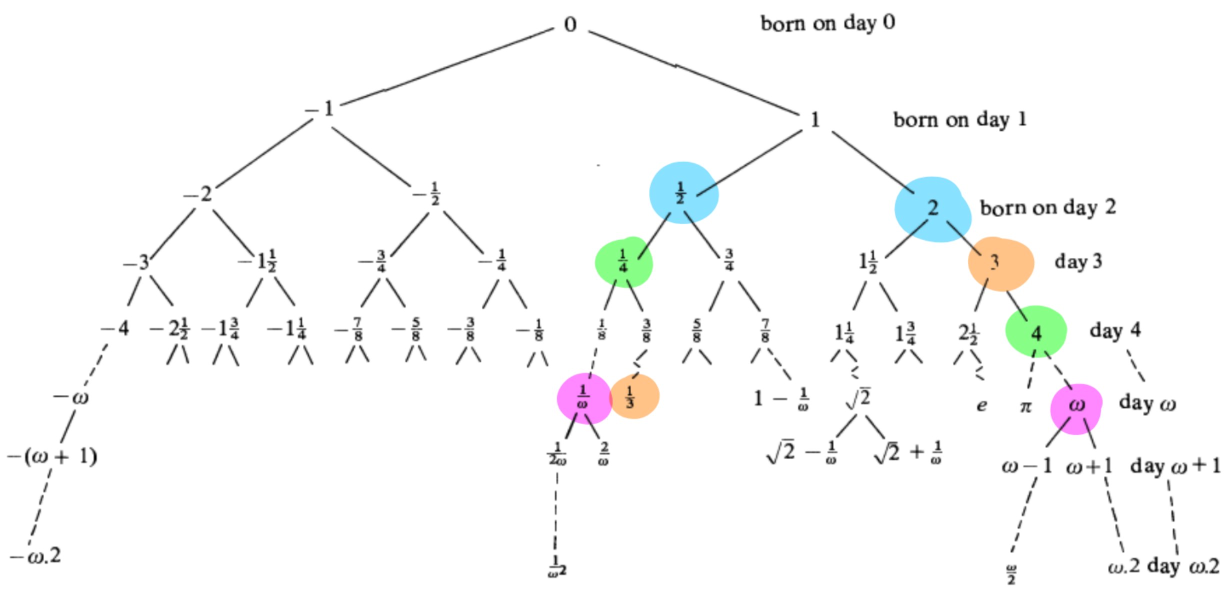


Figure 2: Verschiedene Invserse. 3 und $\frac{1}{3}$ sind orange markiert.

Beweis $y \cdot 3 = 1$ Zuerst prüfen wir, ob Definition 3' das selbe für y liefert. Danach prüfen wir ob $y \cdot 3 = 1$ gilt.

Erstens:

Wir haben $x = 3 = \{0, 1, 2\} = \{2|\}$. Wir wenden Definition 3' an um y zu definieren:

$$\begin{aligned} y &:= \{0, \underbrace{\frac{1 + (x^R - x)y^L}{x^R}}_{\nexists x^R \Rightarrow \emptyset}, \frac{1 + (x^L - x)y^R}{x^L} | \frac{1 + (x^L - x)y^L}{x^L}, \underbrace{\frac{1 + (x^R - x)y^R}{x^R}}_{\nexists x^R \Rightarrow \emptyset}\} \\ &= \{0, \frac{1 + (x^L - x)y^R}{x^L} | \frac{1 + (x^L - x)y^L}{x^L}\} \end{aligned}$$

[7]Conway, J. H. (1976). *On Numbers and Games.* A K Peters/CRC Press. https://books.google.de/books/about/On_numbers_and_games.html?id=opfuAAAAMAAJ&redir_esc=y

Wir wenden nun die doppelte Induktion mit Induktionsanfang $y = \{0|\}$ an:

$$
\begin{aligned}
y &= \{\underset{\uparrow}{0} && |\} && \text{Indiktionsanfang} \\
&= \{0 && |\underset{\uparrow}{\frac{1-y^L}{2}} = \frac{1-0}{2} = \frac{1}{2}\} && \text{Induktionsschritt 1} \\
&= \{0, \underset{\uparrow}{\frac{1-y^R}{2}} = \frac{1-\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4} && |\frac{1}{2}\} && \text{Induktionsschritt 2} \\
&= \{0, \frac{1}{4} && |\frac{1}{2}, \underset{\uparrow}{\frac{1-y^L}{2}} = \frac{1-\frac{1}{4}}{2} = \frac{3}{8}\} && \text{Induktionsschritt 3} \\
&= \{0, \frac{1}{4}, \underset{\uparrow}{\frac{1-y^R}{2}} = \frac{1-\frac{3}{8}}{2} = \frac{5}{16} && |\frac{1}{2}, \frac{3}{8}\} && \text{Induktionsschritt 4} \\
&\vdots \\
&= \{0, \frac{1}{4}, \dots && |\frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \dots\} && \text{Induktionsschritt } \infty
\end{aligned}
$$

Zweitens:

Wir prüfen nun, ob $y \cdot 3 = 1$ gilt:

$$
\begin{aligned}
x &:= 3 = \{0, 1, 2\} = \{2|\} \\
y &:= \frac{1}{3} = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} + \frac{1}{16}, \dots | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{8}, \dots\} \\
y \cdot x &\overset{\text{def}}{=} \{x^L \cdot y + x \cdot y^L - x^L \cdot y^L, \underbrace{x^R \cdot y + x \cdot y^R - x^R \cdot y^R}_{\nexists x^R} | x^L \cdot y + x \cdot y^R - x^L \cdot y^R, \underbrace{x^R \cdot y + x \cdot y^L - x^R \cdot y^L}_{\nexists x^R}\} \\
&= \{x^L \cdot y + x \cdot y^L - x^L \cdot y^L | x^L \cdot y + x \cdot y^R - x^L \cdot y^R\} && x^L = 2,\ x = \\
&= \{2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot y^L - 2 \cdot y^L | 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot y^R - 2 \cdot y^R\} \\
&= \{\frac{2}{3} + 3 \cdot y^L - 2 \cdot y^L | \frac{2}{3} + 3 \cdot y^R - 2 \cdot y^R\} && \boldsymbol{No} \text{ is} \\
&= \{\frac{2}{3} + \cdot y^L | \frac{2}{3} + y^R\}
\end{aligned}
$$

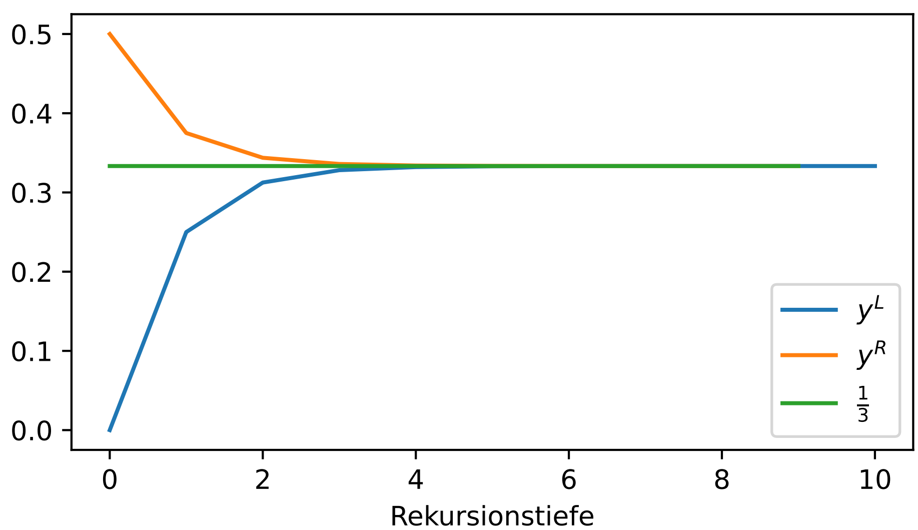
Es gilt wegen der uniformität der Addition[8] (egal welchen Repräsentateen wir für $1 = \{0|\}$ wählen), dass $z := \{\frac{2}{3} + \cdot y^L | \frac{2}{3} + y^R\} - 1$ stehts $z^L < 0$ und $z^R > 0$ gilt. Somit ist $z = 0$ und $y \cdot 3 = 1$.

Intuition hinter der Formel In dieser Grafik sehen wir, wie sich die obere Schranke y^R von oben und die untere Schranke y^L von unten dem Wert $\frac{1}{3}$ annähern.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt


recursionDepth = 10

yL = np.array([0])
```

[8]Florian L.: Die surrealen Zahlen bilden einen angeordneten Ring, Vortrag 2

```python
yR = np.array([])

for i in range(recursionDepth):
    # nehme das letzte Element v von yL und füge (1 - v)/2 zu yR hinzu
    yR = np.append(yR, (1 - yL[-1])/2)
    # nehme das letzte Element v von yR und füge (1 - v)/2 zu yL hinzu
    yL = np.append(yL, (1 - yR[-1])/2)

# setze die Größe der Abbildung
plt.figure(figsize=(5, 3))

# plotte die elemente von yL und yR
plt.plot(yL, label='$y^L$')
plt.plot(yR, label='$y^R$')
plt.plot(np.repeat([1/3], recursionDepth), label='$\\frac{1}{3}$')

# setze die Beschreibung der x-Achse
plt.xlabel('Rekursionstiefe')
plt.tight_layout()

# zeige den plot an
plt.legend()
plt.show()
```



Allgemeiner Beweis $y \cdot x = 1$

Theorem 10 (Conway[9], 1976). Es gelten folgende Aussagen:

(i) $xy^L < 1 < xy^R$

(ii) $y \in \boldsymbol{No}$

(iii) $(xy)^L < 1 < (xy)^R$

(iv) $xy = 1$

[9]Conway, J. H. (1976). *On Numbers and Games*. A K Peters/CRC Press. https://books.google.de/books/about/On_numbers_and_games.html?id=opfuAAAAMAAJ&redir_esc=y

Beweis (i):

$$y := \left\{0, \frac{1+(x^R-x)y^L}{x^R}, \frac{1+(x^L-x)y^R}{x^L} \middle| \frac{1+(x^L-x)y^L}{x^L}, \frac{1+(x^R-x)y^R}{x^R}\right\}$$

Wir haben somit für den i-ten Iterationsschritt:

$$\begin{aligned}
y_{i+1} &= \frac{1+(x_i-x)y_i}{x_i} && , x_i \in \{x_i^R, x_i^L\},\ y_i \in \{y_i^R, y_i^L\} \\
&= \frac{1+(x_i-x)y_i}{x_i} && \mid 1 - x \cdot (\dots) \\
&\Leftrightarrow \\
1 - xy_{i+1} &= 1 - x\frac{1+(x_i-x)y_i}{x_i} \\
&= 1 - \frac{x+(x_i-x)xy_i}{x_i} && \mid \text{Ausklammern} \\
&= \frac{x_i - x - (x_i-x)xy_i}{x_i} \\
&= \frac{1(x_i-x) - (x_i-x)xy_i}{x_i} && \mid \text{Distributivgesetz} \\
&= (1 - xy_{i+1})\frac{x_i - x}{x_i}
\end{aligned}$$

Somit gilt, wenn y_i (i) erfüllt, so muss es auch für y_{i+1} gelten. Denn (i) besagt $1 - xy_i^L > 0$ und $1 - xy_i^R < 0$ für y_i. $\frac{x_i - x}{x_i} > 0$ und es ändert sich somit nichts an der Ungleichung.

Beweis (ii):

Wir zeigen, dass y eine surreale Zahl ist. Dazu zeigen wir $y^L < y^R$.

Induktionsanfang: Für $y = \{0|\}$ ist es klar.

Induktionsschritt:

$$y := \left\{0, \frac{1+(x^R-x)y^L}{x^R}, \frac{1+(x^L-x)y^R}{x^L} \middle| \frac{1+(x^L-x)y^L}{x^L}, \frac{1+(x^R-x)y^R}{x^R}\right\}$$

Wir müssen nun jedes Paar $y^L < y^R$ zeigen: Siehe dazu 3.

Beweis (iii) und (iv):

Die Beweise finden sich in Folgender Grafik 4:

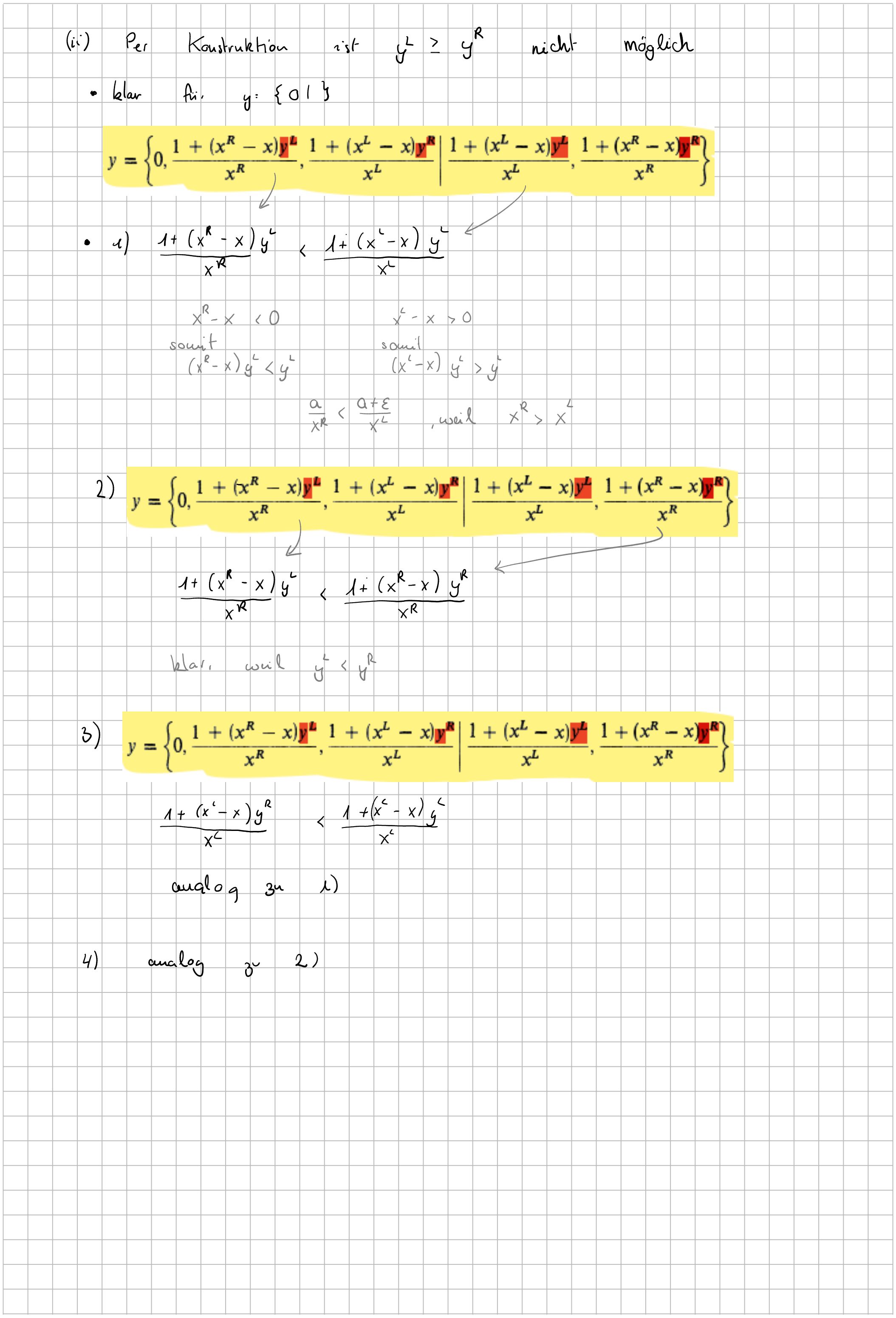
Theorem 2.7

> **Theorem 2.7 (Mantova, Matunski[^77]).** The class $\boldsymbol{No}$ endowed with its ordering $\leq$ and the operations $+, -$ and $\cdot$ is a totally ordered Field which contains $\mathbb{R}$ and $\boldsymbol{On}$.

Erste Hälfte des Beweis:

1. $\boldsymbol{No}$ ist ein Körper haben wir durch die Division und dass $\boldsymbol{No}$ ein Ring ist bereits gezeigt.
2. Totale Ordnung ($\forall x, y : x \leq y \vee y \leq x$): Wir haben bereits gezeigt, dass $\boldsymbol{No}$ eine totale Ordnung ist.
3. $\mathbb{Q} \subset \boldsymbol{No}$:
    - Weil $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{N}\rtimes$ ist[10]
    - Weil alle $x \in \mathbb{N}\rtimes$ ein Multiplikativ-invserses haben

[10] Stefan S.: Definition der surrealen Zahlen, Vortrag 1



(ii) Per Konstruktion ist $y^L \geq y^R$ nicht möglich

- klar für $y: \{0 \mid \}$

$$y = \left\{0, \frac{1+(x^R-x)y^L}{x^R}, \frac{1+(x^L-x)y^R}{x^L} \,\middle|\, \frac{1+(x^L-x)y^L}{x^L}, \frac{1+(x^R-x)y^R}{x^R}\right\}$$

- 1) $\dfrac{1+(x^R-x)y^L}{x^R} < \dfrac{1+(x^L-x)y^L}{x^L}$

$x^R - x < 0$ somit $(x^R-x)y^L < y^L$

$x^L - x > 0$ somit $(x^L-x)y^L > y^L$

$\dfrac{a}{x^R} < \dfrac{a+\varepsilon}{x^L}$, weil $x^R > x^L$

2) $$y = \left\{0, \frac{1+(x^R-x)y^L}{x^R}, \frac{1+(x^L-x)y^R}{x^L} \,\middle|\, \frac{1+(x^L-x)y^L}{x^L}, \frac{1+(x^R-x)y^R}{x^R}\right\}$$

$\dfrac{1+(x^R-x)y^L}{x^R} < \dfrac{1+(x^R-x)y^R}{x^R}$

klar, weil $y^L < y^R$

3) $$y = \left\{0, \frac{1+(x^R-x)y^L}{x^R}, \frac{1+(x^L-x)y^R}{x^L} \,\middle|\, \frac{1+(x^L-x)y^L}{x^L}, \frac{1+(x^R-x)y^R}{x^R}\right\}$$

$\dfrac{1+(x^L-x)y^R}{x^L} < \dfrac{1+(x^L-x)y^L}{x^L}$

analog zu 1)

4) analog zu 2)

Figure 3: Explizite Rechnung aus (ii)

(iii) Also: $(xy)^L < 1 < (xy)^R \quad \forall\, (xy)^L, (xy)^R$

We recall the definition of multiplication

$$xy = \{x^Ly + xy^L - x^Ly^L,\quad x^Ry + xy^R - x^Ry^R \mid x^Ly + xy^R - x^Ly^R,\, x^Ry + xy^L - x^Ry^L\}.$$

somit hat xy die allg. Form:

$x'y + xy' - x'y'$, $x' \in \{x^L, x^R\}$, $y' \in \{y^L, y^R\}$

$= 1 + x'(y - y'')$, wobei $y'' \in \{y^{LL}, y^{LR}, \dots\}$ $\quad y^{LL} = \dfrac{1 + (x^L - x)y^L}{x^L}$

1) x^L, y^{LL}

so $(xy)^L = \underbrace{1 + \underbrace{x^L \underbrace{(y - y^{LL})}_{<0}}_{<0}}_{<1}$, weil $y^L < y$, $y^{LL} < y^L$

2) x^R, y^{RR}

so $(xy)^R = \underbrace{1 + \underbrace{x^R \underbrace{(y - y^{RR})}_{>0}}_{>0}}_{>1}$, weil $y^R > y$, $y^{RR} > y^R$

also $(xy)^L < 1 < (xy)^R$ ✓

(iv) zz $xy = 1$

1) $xy \geq 0$ weil $x = \{0, \dots 1 \dots\}$, $y = \{0, \dots, 1 \dots\}$ $\Rightarrow$ (für $x^L = y^L = 0$ gilt $xy > 0$)

2) nach (iii) muss $z^L < 1 < z^R$ für $z := xy$

Then $z \geqslant 1$, since no $z^R \leqslant 1$, and $z \leqslant$ no 1^L (since some $z^L = 0$), and also $1 \geqslant z$, since no $1^R \leqslant z$, and $1 \leqslant$ no z^L, so that indeed $z = 1$.

Figure 4: Explizite Rechnung aus (iii) und (iv)

- Weil $\mathbb{N}\rtimes$ ein Ring ist

4. $\mathbb{R} \subset \boldsymbol{No}$:
   - Idee: Für $r \in \mathbb{R}$ wähle $x \in \mathbb{Q} \subset \boldsymbol{No}$ mit $x^L < r < x^R$.

Nützliches Vorwissen für nächste Woche:

Valuation: Eine Abbildung $|\cdot| : K \to A \cup \{\infty\}$, wobei K ein Körper und A eine abelsche Gruppe ist, sodass:

1. $|x| = \infty \Leftrightarrow x = 0$
2. $|xy| = |x| + |y|$
3. $|x + y| \geq \max(|x|, |y|)$ mit Gleichheit, wenn $|x| \neq |y|$

archimedisch äquivalent: $a, b \in \boldsymbol{No}$ sind archimedisch äquivalent ($a \asymp b$), wenn $\exists n \in \mathbb{N} : |a| < n|b| \wedge |b| < n|a|$, wobei $|x| := \max\{-x, x\}$.

Zusatz: Wurzeln ziehen in den surrealen Zahlen

Nach Clive Bach (keine Information zu Ihm auffindbar?) gibt ess eine analoge Formel für das Ziehen von Wurzeln in den positiven surrealen Zahlen:

$$\sqrt{x} = y = \left\{ \sqrt{x^L}, \frac{x + y^L y^R}{y^L + y^R} | \sqrt{x^R}, \frac{x + y^L y^{L^*}}{y^L + y^{L^*}}, \frac{x + y^R y^{R^*}}{y^R + y^{R^*}}, \right\}$$

wobei x^L, x^R nicht-negativee Optionen von x sind und $y^L, y^{L^*}, y^R, y^{R^*}$ nur die Optionen sind, bei denen der Nenner nicht 0 wird.